

УДК 539.3

Л. В. КУРПА, д-р техн. наук,
Т. В. ШМАТКО, канд. техн. наук

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрена задача о свободных колебаниях функционально-градиентных пологих оболочек и пластин с учетом их геометрически нелинейного деформирования. Используемый алгоритм базируется на предложенных ранее идеях, в основу которых положены теория R-функций, вариационные методы и метод Рунге-Кутты. Отличительной особенностью предложенного подхода является метод сведения исходной нелинейной системы уравнений движения с частными производными к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение теории R-функций позволяет распространить предложенный подход на оболочки с произвольной формой плана и различными видами граничных условий. Представленные численные результаты подтверждают эффективность, универсальность и достоверность разработанного метода.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, геометрическая нелинейность, пологие оболочки, теория R-функций, метод Рунге, теория Тимошенко.

Функционально-градиентные материалы (ФГМ), как высокопрочные композиты, сохраняющие целостность своей структуры в высокотемпературных средах, относятся к числу наиболее современных и широко используемых материалов во многих отраслях промышленности. Особую роль такие материалы играют при проектировании и изготовлении аэрокосмических объектов. Учитывая, что основные применения ФГМ связаны с работой в высокотемпературных средах, отметим, что первоначально большинство исследований были посвящены исследованию температурных напряжений и деформаций. Позже в работах [4, 5, 7–10] были подняты проблемы, связанные с исследованием механических воздействий на ФГМ. Достаточно полный обзор по нелинейному статическому и динамическому поведению пластин из ФГМ представлен в работах [4, 5, 10].

Следует заметить, что в основном для расчета ФГ пластин и оболочек используются приближенные методы, и наиболее применяемым является метод конечных элементов (МКЭ). Если же используются вариационные методы, то авторы ограничиваются прямоугольной формой плана и в основном одним типом граничных условий вдоль всей границы области (жесткое защемление или шарнирное опирание). Учитывая возможности теории R-функций, в настоящей работе предложен подход, позволяющий исследовать нелинейные колебания ФГ оболочек с практически произвольной формой плана и различными граничными условиями. При этом использован специальный подход для сведения исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Будем рассматривать композитные оболочки, изготовленные из смеси керамики и металла. При этом, как и в работе [2], примем степенной закон изменения объемной доли керамики:

$$V = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^k,$$

где h – толщина оболочки, k – показатель степени объемной доли материала, который может изменяться от 0 до бесконечности, т.е. ($0 \leq k \leq \infty$). При этом если $k = 0$, то структура является полностью керамической, если же $k = \infty$, то – металлической. В общем случае материальные свойства ФГМ (модуль Юнга, коэффициент теплового расширения и др.) могут быть представлены как

$$P = \sum_{j=1} P_j V_j,$$

где P и V_j – материальные свойства и объемная доля составляющего материала, при этом сумма объемных долей составляющих материал должна быть равной 1, т.е.

$$\sum_j V_j = 1.$$

Следует заметить, что ФГ структуры используются, как правило, в высокотемпературных средах, а, следовательно, механические свойства материалов могут существенно изменяться с изменением температуры. Поэтому эта зависимость должна приниматься в расчет для получения более точного решения. Воспользуемся этими зависимостями, приведенными в работах [4, 10]

$$P_j = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right),$$

где P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 , P_3 – коэффициенты, определяемые для каждого конкретного материала. Таблица значений этих коэффициентов для некоторых материалов представлена в работах [4, 9, 10]. Механические свойства смеси из двух составляющих определяются следующим образом:

$$P(z, T) = (P_c(T) - P_m(T)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m(T). \quad (1)$$

Выражение (1) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости E , коэффициента Пуассона ν и плотности ρ композита, P_c , P_m – соответствующие характеристики керамики и металла. Обозначим перемещения в любой точке оболочки через u_1 , u_2 , u_3 . Согласно нелинейной теории пологих оболочек первого порядка, учитывающей деформации сдвига, перемещения u_1 , u_2 , u_3 могут быть представлены как [9]

$$u_1 = u + z\psi_x, \quad u_2 = v + z\psi_y, \quad u_3 = w,$$

где u , v и w – перемещения оболочки в срединной поверхности в направлении осей Ox , Oy , Oz соответственно, ψ_x , ψ_y – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей Oy и Ox . Соотношения для деформаций выражаются с помощью следующих формул:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{ND} \quad (i, j = 1, 2),$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^L &= u_{,x} + w / R_x, & \varepsilon_{22}^L &= v_{,y} + w / R_y, & \varepsilon_{12}^L &= u_{,y} + v_{,x}, \\ \varepsilon_{11}^{ND} &= \frac{1}{2} w_{,x}^2, & \varepsilon_{22}^{ND} &= \frac{1}{2} w_{,y}^2, & \varepsilon_{12}^{ND} &= w_{,x} w_{,y}, & \varepsilon_{13} &= w_{,x} + \psi_x, \\ \varepsilon_{23} &= w_{,y} + \psi_y, & \chi_{11} &= \psi_{x,x}, & \chi_{22} &= \psi_{y,y}, & \chi_{12} &= \psi_{x,y} + \psi_{y,x}. \end{aligned}$$

Усилия и моменты N_{ij} , M_{ij} ($i, j = 1, 2$), которые вычисляются в результате интегрирования вдоль оси Oz , имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g dz, & A_{12} = A_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g v dz, & A_{33} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1+v} dz, \\ B_{11} = B_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g z dz, & B_{12} = B_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g v z dz, & B_{33} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E z}{1+v} dz, \\ D_{11} = D_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g dz, & D_{12} = D_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g v dz, & D_{33} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1+v} dz. \end{aligned}$$

Здесь через E_g обозначена величина

$$E_g = \frac{E}{1 - v^2}, \quad E(z, T) = (E_c(T) - E_m(T)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m(T).$$

Перерезывающие силы Q_x , Q_y определяются как:

$$Q_x = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{13}, \quad Q_y = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{23},$$

где K_s^2 – корректирующий коэффициент сдвига, который ниже принимается равным $5/6$. Если коэффициент Пуассона не зависит от температуры и является одинаковым для керамики и металла, т.е. $\nu_m = \nu_c$, то коэффициенты A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} могут быть вычислены достаточно просто, и матрица (2) принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1(1 - \nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_1(1 - \nu)}{2} \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_2(1 - \nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_3(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix},$$

где

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k + 1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k + 1)(k + 2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k + 3} - \frac{1}{k + 2} + \frac{1}{4(k + 4)} \right) \right) h^3.$$

Плотность композита ρ также определяется в результате интегрирования по толщине оболочки:

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k + 1} \right) h.$$

Потенциальная и кинетическая энергия определяются как

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x (w_{,x} + \psi_x) + Q_y (w_{,y} + \psi_y)) d\Omega,$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} I_0 (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) + 2I_1 (u_{,t} \psi_{x,t} + v_{,t} \psi_{y,t}) +$$

$$+ I_2 (\psi_{x,t}^2 + \psi_{y,t}^2) dx dy,$$

где

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h, \\
I_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z dz = \frac{(\rho_c - \rho_m) k}{2(k+1)(k+2)} h, \\
I_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z^2 dz = \left(\frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3.
\end{aligned}$$

Разрешающие уравнения дополняются граничными условиями, характер которых определяется способом закрепления контура оболочки.

Метод решения. Для решения поставленной задачи воспользуемся подходом, предложенным в работе [6]. Для реализации этого подхода применительно к ФГ положим оболочкам, прежде всего, необходимо решить линейную задачу о свободных колебаниях ФГ пологой оболочки. Алгоритм решения задачи о свободных колебаниях ФГ пологих оболочек с помощью метода R-функций (RFM) представлен в работе [2].

Для решения нелинейной задачи представим неизвестные функции в виде разложения по собственным функциям $w_i^{(c)}(x, y)$, $u_i^{(c)}(x, y)$, $v_i^{(c)}(x, y)$, $\psi_{xi}^{(c)}(x, y)$, $\psi_{yi}^{(c)}(x, y)$ линейной задачи с коэффициентами $y_k(t)$, зависящими от времени:

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{i=1}^n y_i(t) w_i^{(c)}(x, y), \\
\psi_x &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \psi_{xi}^{(c)}(x, y), \\
\psi_y &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \psi_{yi}^{(c)}(x, y), \\
u &= \sum_{i=1}^n y_i(t) u_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j u_{ij}, \\
v &= \sum_{i=1}^n y_i(t) v_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j v_{ij}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Следует обратить внимание на то, что функции u_{ij}, v_{ij} должны быть найдены из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
L_{11}(u_{ij}) + L_{12}(v_{ij}) &= -N l_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) \\
L_{21}(u_{ij}) + L_{22}(v_{ij}) &= -N l_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}),
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$Nl_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) = w_i^{(c)},_x L_{11} w_j^{(c)} + w_i^{(c)},_y L_{12} w_j^{(c)},$$

$$Nl_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) = w_i^{(c)},_x L_{12} w_j^{(c)} + w_i^{(c)},_y L_{22} w_j^{(c)}.$$

Операторы L_{11} , L_{22} , L_{12} , L_{21} определяются как

$$L_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu^2} \left(()_{,xx} + \frac{1 - \nu}{2} ()_{,yy} \right),$$

$$L_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu^2} \left(\frac{1 - \nu}{2} ()_{,xx} + ()_{,yy} \right),$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{E_1}{2(1 - \nu)} ()_{,xy}.$$

Система уравнений (4) может быть решена с помощью RFM практически для произвольной формы плана и различных видов граничных условий. Подставляя выражения (3) для функций u , v , w , ψ_x , ψ_y в уравнения движения и применяя метод Бубнова-Галеркина, получим следующую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $y_j(t)$:

$$y_r''(t) + \omega_{Lr}^2 y_r(t) + \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij}^{(r)} y_i(t) y_j(t) + \sum_{i,j,k=1}^n \gamma_{ijk}^{(r)} y_i(t) y_j(t) y_k(t) = 0. \quad (5)$$

Выражения для коэффициентов $\beta_{ij}^{(r)}$, $\gamma_{ijk}^{(r)}$ имеют следующий вид:

$$\beta_{ij}^{(r)} = \frac{-1}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left(N_{11}^{(L)}(w_j^{(c)})_{,xx} + N_{22}^{(L)}(w_j^{(c)})_{,yy} + \right.$$

$$\left. + 2N_{12}^{(L)}(w_j^{(c)})_{,xy} - k_1 N_{11}^{(Np)} - k_2 N_{22}^{(Np)} \right) w_r^{(c)} d\Omega,$$

$$\gamma_{ijk}^{(r)} = -\frac{1}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left(N_{11}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)}) (w_k^{(c)})_{,xx} + \right.$$

$$\left. + N_{22}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)}) (w_k^{(c)})_{,yy} + \right.$$

$$\left. + 2N_{12}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)}) (w_k^{(c)})_{,xy} \right) w_r^{(c)} d\Omega,$$

$$N^{(L)} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = [C] \varepsilon^{(L)},$$

$$\{N^{(Np)}\} = \{N_{11}^{(Np)}; N_{22}^{(Np)}; N_{12}^{(Np)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(Np)}\},$$

$$\varepsilon^{(L)} = \varepsilon^{(L)}(u_i^{(c)}, v_i^{(c)}, w_i^{(c)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left(u_i^{(c)} \right)_{,x} + k_1 w_i^{(c)} ; \left(v_i^{(c)} \right)_{,y} + k_2 w_i^{(c)} ; \left(\left(u_i^{(c)} \right)_{,y} + \left(v_i^{(c)} \right)_{,x} \right) \right\}^T, \\
\varepsilon^{(Np)} &= \varepsilon^{(Np)} \left(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)} \right) = \\
&= \left\{ \left(u_{ij} \right)_{,x} + \frac{1}{2} \left(w_i^{(c)} \right)_{,x} \cdot \left(w_j^{(c)} \right)_{,x} ; \left(v_{ij} \right)_{,y} + \frac{1}{2} \left(w_i^{(c)} \right)_{,y} \cdot \left(w_j^{(c)} \right)_{,y}, \right. \\
&\left. \left(u_{ij} \right)_{,y} + \left(v_{ij} \right)_{,x} + \left(w_i^{(c)} \right)_{,x} \left(w_j^{(c)} \right)_{,y} \right\}^T.
\end{aligned}$$

Решение системы (5) может быть найдено с помощью различных приближенных методов. В настоящей работе был использован метод Рунге-Кутты. При этом при численной реализации мы ограничились только одной модой. Таким образом, вместо системы уравнений (5) находилось решение одного дифференциального уравнения.

Численные результаты. С целью проверки достоверности предложенного подхода рассмотрим решение некоторых тестовых задач.

В качестве ФГМ выберем комбинацию Al / Al_2O_3 . Механические характеристики для материалов, составляющих такой сплав, представляются следующими параметрами [5, 8]:

$$Al: E_m = 70 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0,3, \quad \rho_m = 2707 \text{ kg} / \text{m}^3;$$

$$Al_2O_3: E_c = 380 \text{ GPa}, \quad \nu_c = 0,3, \quad \rho_c = 3800 \text{ kg} / \text{m}^3.$$

1⁰. Анализ линейных колебаний. Рассмотрим задачу о колебаниях пологих оболочек двойкой кривизны и различных значений безразмерного параметра a/h . Предполагается, что оболочка опирается на квадратный план. Граничные условия соответствуют условиям шарнирного опирания и имеют следующий вид:

$$v = w = M_x = \psi_y = N_x = 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2},$$

$$u = w = M_y = \psi_x = N_y = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{a}{2}.$$

В качестве структуры решения [3] поставленной задачи выберем следующие:

$$u = f_2 \Phi_1, \quad v = f_1 \Phi_2, \quad w = \omega \Phi_3, \quad \psi_x = f_2 \Phi_4, \quad \psi_y = f_1 \Phi_5,$$

где

$$\omega(x, y) = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2},$$

$$f_1 = \frac{1}{2a} (a^2 - x^2) \geq 0,$$

$$f_2 = \frac{1}{2b} (b^2 - y^2) \geq 0;$$

Φ_i ($i = \overline{1,5}$) – неопределенные компоненты, которые представляются в виде разложения в усеченные ряды по какой-либо полной системе функций:

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{k=N_i} a_k^{(i)} \phi_k^{(i)},$$

где $\{\phi_k^{(i)}\}$ – некоторая полная система функций. В настоящей работе в качестве такой системы выбраны степенные полиномы. После проведения вычислительного эксперимента было установлено, что сходимость ре-

Таблица 1

b / R_y	a / R_x	Метод	$k = 0$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$	$k = \infty$
0	0	RFM	0,211	0,180	0,162	0,139	0,132	0,108
		[8]	0,212	0,182	0,164	0,138	0,131	0,108
0,5	0,5	RFM	0,2297	0,196	0,177	0,150	0,141	0,117
		[8]	0,2301	0,200	0,182	0,151	0,142	0,117
1	1	RFM	0,275	0,237	0,215	0,177	0,164	0,140
		[8]	0,274	0,243	0,223	0,186	0,169	0,139
0	0,5	RFM	0,214	0,183	0,165	0,141	0,133	0,109
		[8]	0,215	0,186	0,168	0,141	0,133	0,110
0	1	RFM	0,223	0,191	0,173	0,146	0,137	0,114
		[8]	0,224	0,194	0,177	0,148	0,138	0,114
-0,5	0,5	RFM	0,205	0,175	0,158	0,135	0,128	0,04
		[8]	0,206	0,177	0,160	0,135	0,127	0,105
-1	1	RFM	0,191	0,163	0,148	0,126	0,119	0,097
		[8]	0,192	0,165	0,149	0,125	0,118	0,098

Таблица 2

0	0	RFM	0,060	0,051	0,046	0,040	0,038	0,310
		[8]	0,059	0,049	0,044	0,038	0,036	0,029
0,5	0,5	RFM	0,077	0,067	0,061	0,051	0,047	0,039
		[8]	0,075	0,066	0,060	0,050	0,046	0,038
1	1	RFM	0,111	0,098	0,089	0,073	0,066	0,057
		[8]	0,110	0,098	0,090	0,074	0,067	0,056
0	0,5	RFM	0,064	0,055	0,049	0,042	0,040	0,033
		[8]	0,062	0,054	0,048	0,041	0,040	0,032
0	1	RFM	0,075	0,065	0,059	0,050	0,046	0,038
		[8]	0,073	0,064	0,059	0,049	0,045	0,037
-0,5	0,5	RFM	0,058	0,049	0,044	0,039	0,037	0,030
		[8]	0,056	0,048	0,043	0,037	0,036	0,029
-1	1	RFM	0,054	0,046	0,041	0,036	0,034	0,027
		[8]	0,053	0,045	0,040	0,035	0,033	0,028

зультатов, по крайней мере, в третьем знаке наступает при сохранении 9-й степени для полиномов Φ_1 , Φ_2 , Φ_4 , Φ_5 и 10-й степени для полинома Φ_3 . Результаты, представленные ниже, были получены при сохранении именно такого количества координатных функций. В табл. 1 для случая $a/h = 5$, а в табл. 2 для случая $a/h = 10$ выполнено сравнение собственных частот $\Omega_1 = \lambda_1 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ для пологих ФГ (Al / Al_2O_3) оболочек двойкой кривизны с результатами работы [8].

2°. Анализ нелинейных колебаний. Рассмотрим нелинейные свободные колебания сферической ФГ жестко защемленной оболочки, опирающейся на эллиптический план. В работе [2] эта задача была решена только в линейной постановке и выполнено сравнение для двух сплавов:

FG1: Al / Al_2O_3 : $E_m / E_c = 70 / 380 \text{ GPa}$,

$$v_m = v_c = 0,3, \quad \rho_m / \rho_c = 2707 / 3800 \text{ kg} / \text{m}^3.$$

FG2: Al / ZrO_2 : $E_m / E_c = 70 / 151 \text{ GPa}$,

$$v_m = v_c = 0,3, \quad \rho_m / \rho_c = 2707 / 3000 \text{ kg} / \text{m}^3.$$

Геометрические параметры исследуемой оболочки были выбраны следующими:

$$R_x / R_y = 1, \quad a / b = 2, \quad h / 2a = 0,1, 2a / R_x = 0,2. \quad (6)$$

На рис. 1 представлены результаты исследования геометрически нелинейных колебаний этой оболочки для смеси FG1 и двух значений параметра $k = 0, k = 1$. На рис. 2 представлены результаты для смеси FG2 и значений параметра $k = 10, k = 100$. Сравнение скелетных кривых с ре-

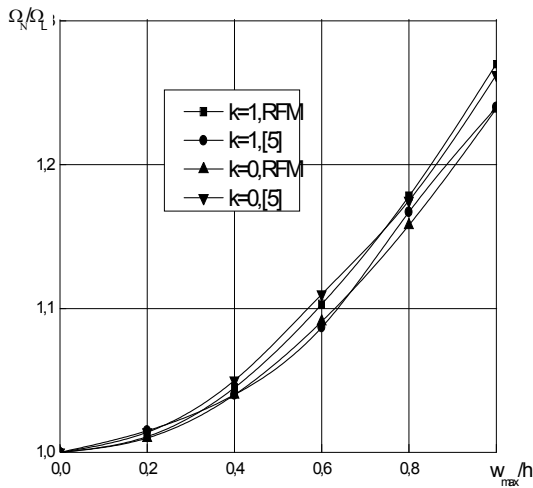


Рис.1

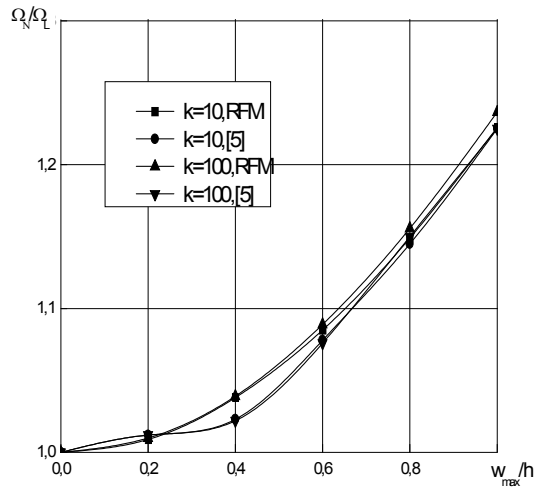


Рис.2

зультатами работы [6] подтверждает достоверность предложенного подхода. В рамках точности графика, полученные результаты практически

совпадают. Максимальное отклонение не превосходит 1.5 %.

Для иллюстрации возможностей метода, существенно использующего теорию R-функций, в работе [2] была рассмотрена задача о линейных колебаниях сферической жестко защемленной ФГ оболочки, опирающейся на план сложной формы (рис. 3). В настоящей работе для этой оболочки решена геометрически нелинейная задача. При численной реализации были использованы результаты линейной задачи, представленные в [2].

На рис. 4 изображены скелетные кривые для пологой сферической жестко защемленной оболочки, изготовленной из смеси FG1 для значений показателя степени объемной доли керамики $k_1 = 0; 1; 10$. Геометрические параметры такие же, как и для эллиптического плана оболочки (6), при этом отношения $b_1 / 2a$ и $a_1 / 2a$ принято равными $b_1 / 2a = 0,35$; $a_1 / 2a = 0,2$.

На рис. 5 представлены аналогичные зависимости для исследуемой оболочки, изготовленной из материала FG2. В обоих случаях кривые имеют жесткий характер, монотонно возрастают, что характерно для умеренно толстых жестко защемленных оболочек ($h / 2a = 0,1$). При проведении

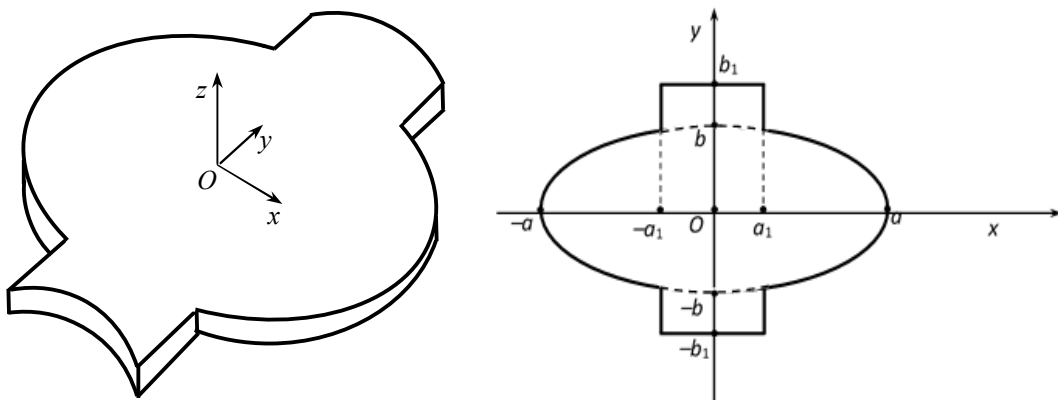


Рис.3

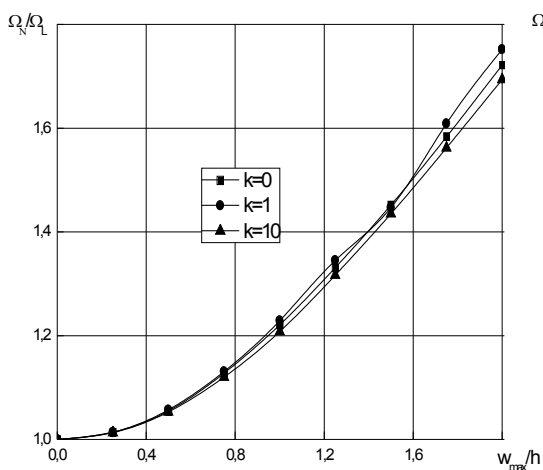


Рис.5

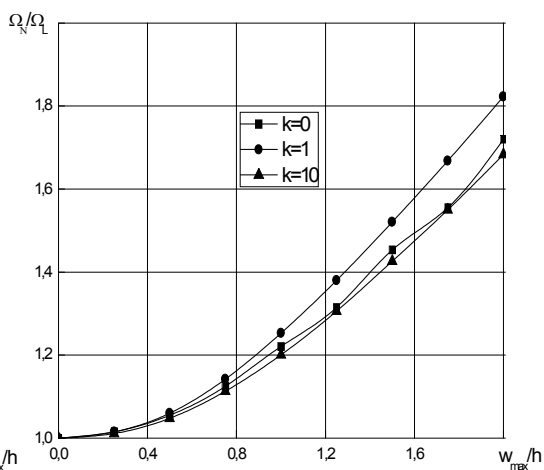


Рис.5

вычислительного эксперимента было установлено, что при стремлении отношения $b_1 / 2a \rightarrow 0,25$, т.е. отношение $b_1 / b \rightarrow 1$, скелетные кривые совпадают с соответствующими кривыми для эллиптического плана, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Таким образом, в работе предложен метод исследования геометрически нелинейных свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана, базирующийся на использовании теории R-функций, вариационном методе Ритца, процедуры Бубнова-Галеркина и методе Рунге-Кутты. Для уточненной теории пологих оболочек 1-го порядка предложенный подход реализован в рамках системы POLE-RL. Проведенное тестирование для оболочек, опирающихся на квадратный и эллиптический план, доказывает достоверность и эффективность предложенного метода, иллюстрация которого выполнена для оболочек со сложной формой плана $a_1 / 2a = 0.2$.

РЕЗЮМЕ. Показано можливість застосування теорії R-функцій для розробки алгоритму дослідження геометрично нелінійних функціонально-градієнтних (ФГ) пологих оболонок з довільною формою плану. Алгоритм розроблено для уточненої теорії ФГ пологих оболонок типу теорії С.П.Тимошенко. За допомогою розробленого програмного забезпечення розв'язано тестові задачі для ФГ пологих оболонок з квадратним та еліптичним планом. Для підтвердження ефективності та універсальності запропонованого підходу досліджено оболонки різної кривини, які мають складну форму плану.

Ключові слова: функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), геометрична нелінійність, пологі оболонки, теорія R-функцій, RFM, метод Ритца, складна форма, теорія Тимошенко.

SUMMARY. The algorithm of investigation of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells with an arbitrary form is worked out. The proposed algorithm is based on the joint usage of refined shallow shell theory of the first order (Timoshenko's type), Ritz variational method, R-function theory, procedure by Bubnov-Galerkin and method by Runge-Kutta. Test problems have been solved for FG shallow shells with square and elliptical plan form. In order to confirm the advantage of the proposed approach the nonlinear vibrations of the double-curved shallow shells with complex plan form are investigated.

Key words: functionally-graded materials (FGM), geometrically nonlinearity, shallow shells, R-functions theory, (RFM), method by Ritz, complex form, Timoshenko's type theory.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
2. Курпа Л. В., Шматко Т. В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – N 8(54). – С. 77–85.
3. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 551 с.
4. Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K., Bakhtiari-Nejad, F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells // J. Sound Vibration. – 2011. – Vol. 330. – P. 1432–1454.
5. Chorfi S.M., Houmat A. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92. – P. 2573–2581.
6. Kurpa L.V. Nonlinear free vibrations of multilayer shallow shells with a symmetric structure and with a complicated form of the plan. J. Math. Sciences, 2009 162, №1:85–98.

7. *Loy C.T, Lam K.Y, Reddy J.N.* Vibration of functionally graded cylindrical shells // Int J. Mech Sci.– 1999.–Vol. 41.– P. 309–324.
8. *Matsunaga H.* Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory// Composite Structures.– 2008.– Vol. 84.– P. 132–46.
9. *Reddy J.N.* Analysis of functionally graded plates//Int. J. Numerical methods in engineering.– 2000.– Vol. 47.– P. 663–684.
10. *Shen H.S.* Functionally Graded Materials. Nonlinear Analysis of Plates and Shells.– Florida.: CRC Press, 2009.–266 p.

Національний технічний університет «ХПІ», г. Харків

Поступила 01.12.2014